С. А. ГРИЦЕНКО

ПРОИЗВОДНЫЕ ПОЛЯ ВРЕМЕН

Предлагаются способы вычисления и продолжения производных поля времен в неоднородной трехмерной среде с криволинейными границами. Рассматривается важный случай пересчета смешанных производных, взятых по координатам источника и приемника. Дается полная система связей между производными в координатах ОТВ и ОГТ, из которой следует, что без вычисления смешанных производных нельзя вычислить вторую производную годографа ОГТ *t (l)* в точке $l \neq 0$ и вторую производную годографа l = const. Показывается, что смешанная производная не зависит от статических поправок. Получены формулы, выражающие геометрическую расходимость через кинематические характеристики.

Понятие поля времен упоминалось еще в 1946 г. А. Г. Гамбурцевым [1] при описании систем наблюдений. Конструктивное же введение и использование этого понятия было предложено Н. Н. Пузыревым [5]. Он показал, что для решения обратной задачи необходимо рассматривать наблюдаемые времена как функцию не только положения приемника, но и положения источника (поле времен). Использование особенностей этой функциональной зависимости в сейсмических задачах привело к значительным результатам. Достаточно упомянуть метод ОГТ, основанный на симметричности одного сечения этой функции, называемого годографом ОГТ. Исследованию свойств поля времен в важном случае однослойных моделей сред посвящены работы [6, 7]. В случае многослойных сред поле времен изучалось лишь в локальном варианте, когда оно рассматривалось в окрестности известного луча. При этом развивались способы вычисления и продолжения производных поля времен вдоль луча. За исключением двух частных случаев, рассмотренных ниже, до последнего времени разрабатывались алгоритмы вычисления производных для фиксированного положения источника либо приемника [2, 4, 9].

Однако такие производные не отражают главного в специфике поля времен — одновременной зависимости от координат источника и приемника. Предлагаемая работа имеет целью восполнить этот пробел. Здесь разработаны способы вычисления и продолжения смешанных по отношению к положению источника и приемника производных, т. е. производных вида $\partial^2\tau(\partial x_1\partial x_2)$, где x_1 и x_2 — координаты положения источника и приемника. Такие производные играют важную роль в кинематической интерпретации. Прежде всего, следует отметить, что вторые производные годографа ОГТ *t(l)* в точке $l = 0$ и вторые производные годографа l = const, как показано ниже, выражаются через смешанные производные и, следовательно, без предлагаемого здесь или подобного алгоритма не могут быть вычислены. Существенно, что смешанные производные годографа не зависят от статических поправок. Действительно, дифференцируя известное представление модели поля времен со статикой: $\tau(x_1,x_2)=t(x_1,x_2)+\eta(x_1)+\eta(x_2)$, убеждаемся, что $\partial^2 t/(\partial x_1\partial x_2)=\partial^2\tau/(\partial x_1\partial x_2)$. Кроме того, как показано в этой работе, через смешанные производные выражается такая характеристика поля времен, как геометрическое расхождение.

Система определений и понятий. Пусть в евклидовом пространстве E^3 задана скалярная функция v(r), определяющая скорость распространения упругих колебаний в произвольной точке r из E^3. Функция v(r) кусочно-непрерывна. Множество пар точек из E^3 (декартово произведение E^3XE^3) образует шестимерное пространство, которое обозначим через Ω^6, а его элементы суть точки в Ω^6 — через $\omega(\omega=(r^1,r^2),\,\omega\in\Omega^6,\,r^1\in E^3,\,r^2\in E^3)$. Обозначим через $\tau=\tau(\omega)$ скалярную функцию, заданную на Ω^6 и определяющую время распространения волны от точки r^1 к точке r^2 в среде со скоростью $v(r)$. Эту функцию принято называть нолем времен или двухточечным эйконалом.

Пусть в Ω^6 заданы две криволинейные системы координат a^i и c^α. Задано также правило преобразования координат c^α в координаты a^i системой функций $g^i \cdot a^i = g^i(c^\alpha)$. Здесь и далее при записи, функции принята следующая условность: если в записи аргумента функции указана буква с индексом, то в качестве аргумента этой функции следует рассматривать многомерную величину, компоненты которой определяются значениями индекса, т. е. запись $g^i(c^\alpha)$ означает то же, что и $g^i(c^1, c^2, ..., c^6)$. В дальнейшем будем использовать формулы преобразования производных поля времен по криволинейным координатам при переходе от одних координат к другим, например от c^α к a^i. Эти формулы легко получить, дифференцируя сложную функцию $\tau(g^i(c^\alpha))$.

По определению пространства Ω^6 шесть его координат определяют положение двух точек в E^3. Если какая-либо фиксированная тройка из этих координат определяет положение одной точки $r^1 \in E^3$, а три оставшиеся координаты — положение другой точки $r^2 \in E^3$, то каждую из этих троек можно считать криволинейными координатами в E^3. Назовем систему координат в Ω^6, обладающую таким свойством, точечной системой координат, а координаты системы — точечными. Примерами подобных координат являются координаты ОТВ и ОТП, используемые в сейсморазведке. Тот факт, что каждая тройка точечных координат из Ω^6 является координатами в E^3, определяется следующим видом функции $\omega = \omega(a^i, b^k)$:

$$\omega = \omega(r^1(a^i), r^2(b^k)). \qquad (1)$$

Дифференцируя (1) по a^i и b^k, получим, что базисные векторы точечной системы координат имеют вид

$$\omega_i = (r_i^1, o),\ \omega_k(o, r_k^2), \qquad (2)$$

где о — нулевой вектор из E^3. В (2) и далее дифференцирование обозначается с помощью нижних индексов, т. е. $\omega_i = \partial\omega / \partial d$. Заметим также, что в дальнейшем верхние индексы там, где это возможно, будем опускать, так как соответствующие векторы определяются нижней индексацией.

Дифференцируя (2), получим:

$$\omega_{ij} = (r_{ij}, o),\ \omega_{kl} = (o, r_{kl}),\ \omega_{ik} = \omega_{ki} = o. \qquad (3)$$

Соотношения (2) и (3) определяют геометрические свойства точечной системы координат.

Пусть в Ω^6 задана точечная система координат (a^i, b^k), инициирующая в E^3 две системы криволинейных координат a^i и b^k, и задана скалярная функция $\tau(a^i, b^k)$. Производные этой функции по точечным координатам назовем точечными, причем производные по координатам, описывающим положение одной точки E^3 (входящим в одну тройку), назовем одноточечными, в противном случае — двухточечными.

Система координат ОГТ. Рассмотрим одну неточечную систему координат, получившую большое распространение в сейсморазведке и известную как система координат ОГТ. Каждая координата такой системы в противоположность точечной несет информацию о положении сразу обеих точек в E^3, определенных данной системой координат. Пусть задана точечная система координат (c^α, d^γ), неточечная система (a^i, b^k) определяется преобразованием координат:

$$\begin{aligned} a^i &= g^i(c^\alpha, d^\gamma) = c^\alpha + d^\gamma, \quad i = \alpha = \gamma. \\ b^k &= g^k(c^\alpha, d^\gamma) = c^\alpha - d^\gamma, \quad k = \alpha = \gamma. \end{aligned} \qquad (4)$$

Дифференцируя (4) по c^α и d^γ получим:

$$
\begin{aligned}
g^i_\alpha &= \delta^i_\alpha, \quad g^i_\gamma = \delta^i_\gamma, \\
g^k_\alpha &= \delta^k_\alpha, \quad g^k_\gamma = \delta^k_\gamma.
\end{aligned} \tag{5}
$$

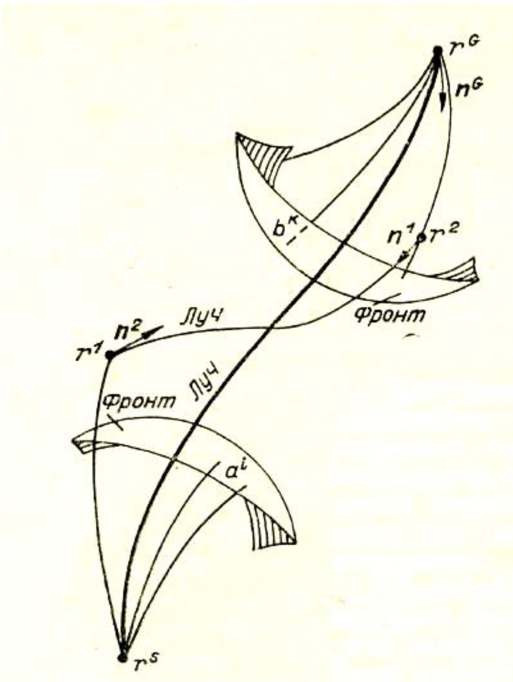
Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&T_1 = \|\tau_i\|, T_2 = \|\tau_k\|, T_k = \|\tau_\alpha\|, T_L = \|\tau_\gamma\|, \\
&T_{11} = \|\tau_{ij}\|, T_{22} = \|\tau_{kl}\|, T_{12} = \|\tau_{ik}\|, \\
&T_{XX} = \|\tau_{\alpha\beta}\|, T_{LL} = \|\tau_{\gamma\delta}\|, T_{XL} = \|\tau_{\alpha\beta}\|.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Дифференцируя (5) no c^α и d^γ убеждаемся, что все вторые производные закона преобразования (4) равны нулю. Учитывая это ж подставляя (5) и (6) в соотношения для преобразования производных от координат c^α к координатам a^i получим

$$
\begin{aligned}
&T_X = T_1 + T_2, \quad T_L = T_1 - T_2, \\
&T_{XX} = T_{11} + 2T_{12} + T_{22}, \quad T_{LL} = T_{11} - 2T_{12} + T_{22}, \\
&T_{XL} = T_{11} - T_{22}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Соотношения (7) в матричной форме содержат полную систему связей первых и вторых производных точечных систем координат (координат ОТВ и ОТП) и неточечной системы координат ОГТ. Заметим, что из-за отсутствия матричного умножения в (7) эти соотношения можно непосредственно использовать как для шестимерных полей времен (наблюдения в пространстве), так и для четырехмерных (наблюдения на поверхности).



Вычисление производных поля времен. Пусть в некоторой точке Ω^6, $\omega^0 = (\mathrm{r}^s, \mathrm{r}^G)$ задан луч, соединяющий точки r^s и r^G, и известны значения скорости v и ее производных в любой точке этого луча. Требуется найти производные поля времен $\mathrm{r}(\omega)$ в точке ω^0 по произвольным криволинейным координатам в Ω^6.

Для решения этой задачи достаточно найти производные в некоторой фиксированной системе координат, поскольку переход к любым заданным координатам можно осуществить с помощью соотношений перехода от одних координат к другим. Поэтому без потери общности рассмотрим точечные координаты.

Существует ряд способов вычисления всех одноточечных производных, для двухточечных разработаны способы вычисления в двух частных случаях. Здесь имеется в виду случай двумерной среды, для которой В. С. Черняк [3] свел задачу вычисления двух точечных производных для заданной траектории к задаче вычисления одноточечных производных на отдельных участках этой траектории (для двумерной среды С. В. Гольдин [2] указал путь получения формул без сведения к одноточечным производным). Второй случай относится к трехмерной среде, но только к такой точке $\omega^0 = (\mathrm{r}^s, \mathrm{r}^G)$, когда источник и приемник совпадают, т. е. $\mathrm{r}^s = \mathrm{r}^G$. В этом случае из (7) следует, что

$$\mathrm{T}_{12} = \mathrm{T}_{11} - \mathrm{T}_{LL}/2.$$

Производные поля времен в лучевой системе координат. Пусть в точке $\omega^0 = (\mathrm{r}^s, \mathrm{r}^G)$ задана криволинейная система координат в Ω^6 следующим образом: в точках r^s и r^G в E^3 заданы лучевые координаты a^i и b^k соответственно. Координаты a^i и b^k для $i, k = 1,2$ определяют лучи, вышедшие из r^s и r^G соответственно, а a^3 и b^3 — время распространения волн, отсчитываемое от точек r^s и r^G. Тогда значение времени в произвольной точке $\omega = (\mathrm{r}^1, \mathrm{r}^2)$, равное времени распространения волны в среде $v(\mathrm{r})$ от r^1 к r^2, связано с введенными координатами следующей функциональной зависимостью: $\mathrm{r}(\mathrm{r}^1(a^i), \mathrm{r}^2(b^k))$.

В принятой системе координат (см. рисунок) поле времен τ удовлетворяет следующим свойствам:

$$\tau(r^1(a^i, r^s)) = a^3, \ \ \tau(r^G, r^2(b^k)) = b^3. \tag{8}$$

Дифференцируя (8), получим, что все вторые одноточечные производные в точках $\omega^1 = (\mathrm{r}^1, \mathrm{r}^s)$, $\omega^2 = (\mathrm{r}^G, \mathrm{r}^2)$ равны нулю:

$$\tau_{ij}(\mathrm{r}^1, \mathrm{r}^s) = 0, \quad \tau_{kl}(\mathrm{r}^G, \mathrm{r}^2) = 0. \tag{9}$$

Чтобы найти двухточечные производные, используем уравнения эйконала. Поле времен τ удовлетворяет двум уравнениям эйконала:

$$\nabla_1 \tau(r^1, r^2) = n^1(r^1, r^2)/v(r^1), \ \ \nabla_2 \tau(r^1, r^2) = n^2(r^1, r^2)/v(r^2), \tag{10}$$

здесь n^1 и n^2 — единичные векторы в точках r^1 и r^2, касательные к лучу, проходящему через эти точки в среде $v(\mathrm{r})$. Если в первом уравнении из (10) в качестве r^1 выбрать r^G, а во втором в качестве r^2 — r^s, то в соответствии с определением лучевых координат (10) приобретает вид

$$\nabla_1 \tau(r^G, r^2(b^k)) = n^G(b^1, b^2)/v(r^G), \ \ \nabla_1 \tau(r^1(a^i), r^s) = n^s(a^1, a^2)/v(r^s). \tag{11}$$

Заметим, что сделанный здесь выбор является основным источником результатов, полученных в работе. Дифференцируя поле времен $\tau(r^1(a^i), r^2(b^k))$ по a^i и b^k, запишем, с учетом (11), получившиеся производные в точках $\omega^1 = (\mathrm{r}^G, \mathrm{r}^2)$ и $\omega^2 = (\mathrm{r}^1, \mathrm{r}^s)$:

$$\tau_i = n^G(b^1, b^2) r_i^G / v(r^G), \quad \tau_k = n^s(a^1, a^2) r_k^s / v(r^s). \tag{12}$$

Дифференцируя первое выражение из (12) по b^k, а второе — по a^i получим, что в точках ω^1 и ω^2 двухточечные производные следующим образом выражаются через базисные векторы r_i, r_k и векторы n_i и n_k лучевых координат:

$$\begin{gathered} \tau_{ik} = r_i^G n_k^G = (b^1, b^2)/v(r^G), \quad \tau_{ki} = r_k^s n_i^s (a^1, a^2)/v(r^s), \\ i,k = 1,2, \quad \tau_{ik} = \tau_{ki} = 0, \ \ i,k = 3. \end{gathered} \tag{13}$$

Соотношения (13) выражают значения двухточечных производных в точках ω^1 и ω^2 по координатам, касательными к которым являются базисные векторы (r_i^G, r_k^2), (r_k^s, r_i^1). Из (13) следует, что двухточечные производные не зависят от кривизны осей координат. Первые части в (13) не зависят от b^3 и a^3. Это значит, что двухточечные производные по лучевым координатам постоянны вдоль лучей для точек ω^1 и ω^2.

Для нижеследующих преобразований более удобно пользоваться матричными операциями. Будем считать, что компоненты пары векторов, определенных значениями индексов 1 и 2, образуют матрицу 2Х3. Обозначим, если специально не оговорено, такие матрицы, составленные из компонент векторов, заглавными буквами, совпадающими со строчными буквами, обозначающими соответствующие векторы.

Номер координаты вектора равен значению первого индекса элемента матрицы, номер вектора — значению второго индекса. Все верхние индексы, характеризующие векторы, сохраняются и для соответствующих матриц. Например, пара векторов r_i^G, i = 1, 2, образует матрицу R^G: $R^G = \|r_{mi}\|$, где m — номер координаты вектора r. Матрицы, зависящие от координат a^i пометим сверху волнистой чертой, а от b^k — чертой с изломом. В этих обозначениях (13) перепишется в виде

$$T_{12} = \widetilde{R}^{G^T} \cdot N^G / v(r^G), \quad T_{21} = \hat{N}^{s^T} \times N^s / v(r^s), \tag{14}$$

здесь T — знак транспонирования.

Вычисление двухточечных производных в лучевых координатах рекомендуется проводить в следующем порядке: решением краевой задачи для уравнения луча находится луч, проходящий через точки r^G и r^s. Далее, задаются начальные условия $\widetilde{R}^G \hat{N}^G$ в точке r^G для уравнений переноса базисных векторов вдоль найденного луча. Эти уравнения в матричных обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} d\hat{R} / db^3 &= \hat{N}v + n(\nabla v)^T \cdot R, \\ d\hat{N} / db^3 &= n^1 n^T \Psi \hat{R} + nc^T N + (c^T n) N - \Psi R, \end{aligned} \tag{15}$$

здесь Ψ — матрица вторых производных в окрестности луча, T — знак транспонирования. Решением системы (15) с заданными начальными условиями находим матрицу базисных векторов $\hat{R}^s$ в точке r^s. Соотношения (14) определяют двухточечные производные T_{12} по направлениям, идентифицируемым заданной матрицей R^G и вычисленной матрицей R^s.

Если в точке $\omega^1 = (r^G, r^s)$ заданы другие координаты, по которым необходимо вычислить двухточечные производные, то их можно найти, используя формулы перехода к этим координатам.

Производные поля времен в системе координат Попова — Пшенчика. Предложенный в предыдущем разделе способ вычисления двухточечных производных трудоемок и предполагает решение системы из двенадцати обыкновенных дифференциальных уравнений с достаточно сложными правыми частями. Существенное упрощение удается получить, если проводить вычисления в системах координат, базисные векторы которых не меняют свою длину и угол между ними при движении вдоль луча [4]. Наиболее простой системой координат в этом классе является система координат Попова — Пшенчика [8]. Расширим определение ее (обозначим ее через ε) для пространства Ω^6. Пусть началом координат ε в Ω^6 является точка $\omega^0 = (r^s, r^G)$. В точках r^s и r^G заданы криволинейные координаты в E^3 такие, что базисные векторы r_α и r_γ (α, γ = 1, 2) ортогональны лучу, соединяющему точки r^s и r^G. Этот луч отражает координатные линии a^3 и b^3 для ε, значения координат на которых равны времени распространения волн, отсчитываемому от точек r^s и r^G вдоль указанного луча.

Прежде чем продолжить определение системы координат, введем для пар базисных векторов r_α и r_γ (α, γ = 1, 2) следующие матричные обозначения:

$$\widetilde{E} = \|r_{m\alpha}\|, \ \hat{E} = \|r_{m\gamma}\|.$$

Матричная форма разложения базисных векторов $\hat{R}$, $\widetilde{R}$ и векторов $\hat{N}/v$, $\widetilde{N}/v$ лучевой системы координат в базисе системы координат ε имеет вид

$$\widetilde{R} = \widetilde{E}\widetilde{Q}, \quad \hat{R} = \hat{E}\hat{Q},$$
$$\widetilde{N} = \widetilde{E}\widetilde{P}v, \quad \hat{N} = \hat{E}\hat{P}v, \qquad (16)$$

здесь $\hat{Q}, \hat{P}, \widetilde{Q}, \widetilde{P}$ — матрицы компонент разложения. Заметим также, что, как следует из (16) и формул преобразования координат, $\widetilde{Q}^{-1} = \left\| g_{\alpha}^{i} \right\|$, $\hat{Q}^{-1} = \left\| g_{\gamma}^{k} \right\|$. С учетом этого в матричных обозначениях формулы преобразования двухточечных производных при переходе от лучевой системы координат к системе координат ε имеют вид

$$T'_{12} = \widetilde{Q}^{-1^T} T_{12} \hat{Q}^{-1}, \quad T'_{21} = \hat{Q}^{-1^T} T_{21} \widetilde{Q}^{-1}; \qquad (17)$$

здесь $T'_{12} = \left\| \tau_{\alpha\gamma} \right\|$, $T'_{21} = \left\| \tau_{\gamma\alpha} \right\|$, $\alpha, \gamma = 1, 2$.

В работе [4] показано, что, если:

$$E^T = I, \; a(d\widetilde{E}^T / da^3 \times \widetilde{E} = o, \; (d\hat{E}^T / db^3) \cdot \hat{E} = 0 \qquad (18)$$

(I — единичная, o — нулевая матрицы), то система ε является системой координат Попова — Пшенчика [8], а Q и P из (16) удовлетворяют уравнениям

$$d\widetilde{Q} / da^3 = \widetilde{P}v^2, \quad d\hat{Q} / ab^3 = \hat{P}v^2,$$
$$d\widetilde{P} / da^3 = \widetilde{E}_{\Psi}^T \widetilde{E}\widetilde{Q} / v, \quad d\hat{P} / db^3 = \hat{E}_{\Psi}^T \hat{E}\hat{Q} / v. \qquad (19)$$

С другой стороны, подставляя (14) в (17) и используя (16), получим, что двухточечные производные следующим образом связаны с P и Q:

$$T'_{12} = \hat{P}^G Q^{-1}, \quad T'_{21} = \widetilde{P}^s Q^{-1}. \qquad (20)$$

Соотношения (20) получены при таком выборе ε, что $\widetilde{E}^G = \hat{E}^G$, а для второго уравнения $\widetilde{E}^s = \hat{E}^s$.

Задание начальных значений $\hat{P}^G$ и $\hat{P}^s$ в уравнениях (19) обусловлено, как видно из (16), выбором лучевых координат, т. е. матрицы N^G. Если выбрать, что допустимо, лучевые координаты так, что $N^G = E^G$, то (20) примет вид:

$$T'_{12} = \hat{Q}^{-1} / v(r^G), \quad T'_{21} = \widetilde{Q}^{-1} / v(r^s). \qquad (21)$$

Матрицы $\hat{Q}$ и $\widetilde{Q}$ вычисляются посредством решения (19). Уравнения (21) показывают, что с точностью до деления на скаляр известная матрица Q равна обратной матрице двухточечных производных. При этом двухточечные производные определены для направлений, идентифицируемых заданными матрицами $\hat{E}^G$, $\widetilde{E}^s$ и матрицами $\hat{E}$ и $\widetilde{E}$ базисных векторов системы координат ε, которые вычисляются с помощью дифференциальных уравнений [8].

Связь кинематических характеристик сейсмических волн с геометрической расходимостью. Как следует из [8], геометрическая расходимость J равна определению матрицы Q. Учитывая это, вследствие (21), можно записать:

$$J_1 = \left| T_{12}^{-1} \right| / v(r^G), \quad J_2 = \left| T_{21}^{-1} \right| / v(r^s). \qquad (22)$$

Формулы (22) связывают в случае произвольной изотропной среды геометрическую расходимость с кинематическими характеристиками волн. Ранее такая связь была установлена для горизонтально-слоистой среды [10].

То, что геометрическая расходимость связана с двухточечными производными, означает, что геометрическую расходимость можно получить из кинематических данных лишь при многократной системе наблюдений, хотя сама по себе геометрическая расходимость является характеристикой амплитуды волны при фиксированном источнике.

В предположении сферичности фронта волны в окрестности взрыва соотношения (22) позволяют по кинематическим характеристикам, определенным при многократной системе наблюдений, вычислить изменение амплитуды волны вдоль поверхности наблюдения, обусловленное геометрической расходимостью. Заметим также, что с помощью соотношений (22) легко доказать симметричность геометрической расходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гамбурцев Г. А.** Корреляционные системы наблюдений при разведке по методам отраженных и преломленных волн.—В кн.: Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
2. **Гольдин С. В.** Интерпретация данных сейсмического метода отраженных волн. М.: Недра, 1979.
3. **Гольдин С. В.** н др. Система КИНГ. Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1980.
4. **Гриценко С. А.** Способы вычисления геометрических характеристик фронта волны в изотропных неоднородных средах.— Геол. и геофиз., 1984, № 1.
5. **Пузырен Н. Н.** К теории интерпретации точечных сейсмических наблюдений.— Геол. и геофиз., 1963, № 9.
6. **Пузырев Н. Н.** Двумерные временные поля, отраженные волны.— Там же, 1973, № 1.
7. **Пузырев Н. Н.** Временные поля отраженных волн и метод эффективных параметров. Новосибирск: Наука, 1979.
8. **Popov M. M., Psencik S.** Eay Amplitudes In Inhomogeneous Media With Curved Interfaces.— Geophys. Sbornik, 1976, N 454.
9. **Shah P. M.** Use of Wavefront Curvature to Relate Seismic Data With Subsurface parameters.— Geophysics, 1973, v. 38, N 5.

СибГЭ *Поступила в редакцию*
Новосибирск *23 февраля 1983 г.*

S. A. Gritsenko

THE DERIVATIVES FOR TIME FIELD

The paper proposes some ways for calculation and continuation of the derivatives for time field in non-uniform three-dimentional medium with curvilinear boundaries. Discussed in the paper is an important case of recalculation of mixed derivatives furnished by the coordinates of sourse and the receiver. The complete system of connections between the derivatives in the coordinates of OTV and CDP given here shows that it is impossible to determine the second derivative for the CDP *t(l)* travel-time curve in the point $l \neq 0$ and the second derivative for l = const, travel-time curve without mixed derivatives. Mixed derivative is shown to be not depend on static corrections. The formulae obtained show geometric discrepancy due to kinematic characteristics.