С. А. Гриценко

СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФРОНТА ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В статье представлен обзор работ, посвященных пересчету характеристик фронта волны вдоль фиксированного луча (кривизны фронта, квадратичных форм фронта, производных от канонических переменных *P* и *Q).* Обзор основан на дифференциальном уравнении в обобщённой системе координат ортогональной лучу. Частными случаями этого уравнения являются дифференциальные уравнения, полученные различными авторами.

В ряде недавно опубликованных работ рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения, решение которых позволяют пересчитывать вдоль сейсмического луча локальные геометрические характеристики второго порядка поверхности волнового фронта. Вначале такие способы пересчета строились для вычисления амплитуд сейсмического сигнала (геометрического расхождения). Однако, как установлено для случая двумерной однородной среды [9, 14], локальные геометрические характеристики волнового фронта непосредственно связаны с параметрами годографов. Этот факт был обобщен [3] для случая связи между геометрическими характеристиками фронта и производными одноточечного эйконала по произвольным криволинейным координатам в трехмерной слоисто-неоднородной среде, вследствие чего способы пересчета стали рассматриваться как аппарат для расчета кинематических характеристик сейсмических записей.

В предложенной работе предлагается вывод в матричной форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений пересчета, полученных ранее существенно отличающимися между собой способами. С этой точки зрения настоящая работа может рассматриваться как обзор. С другой стороны, можно надеяться, что полученные обобщения в задаче пересчета будут представлять и самостоятельный интерес.

Пусть r — радиус-вектор точки в Евклидовом пространстве E^3 . Пусть в E^3 определены две скалярные функции v(r) и τ (r), связанные уравнением

$$\nabla\tau = n / v, \tag{1}$$

здесь n — единичный вектор, а $\nabla\tau = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$; *x*, *y*, *z* — декартовы координаты в E^3. Если справедливо (1), то v(r) и τ (r) описывают скорость распространения волны и время ее прихода в точку r при фиксированном положении источника волны в изотропной неоднородной среде. Функции τ (r) и v(r), удовлетворяющие (1), определяют в E^3 криволинейную, так называемую лучевую, систему координат следующим образом. Координатной линией *t* лучевой системы координат t, ξ_1, ξ_2 является характеристическая линия уравнения (1), называемая лучом. Если векторная функция r = r(t, ξ^1, ξ^2) определяет правило преобразования лучевых координат в декартовы, то уравнение луча имеет вид:

$$d\mathrm{r}/dt = \mathrm{n}v, \quad d\mathrm{n}/dt = \mathrm{n}(\mathrm{c}\cdot\mathrm{n}) - \mathrm{c}; \tag{2}$$

здесь c = $\nabla v = (v_x, v_v, v_z)$. Параметр *t* луча r(*t*) выбран из условия

$$\tau(r(t, \xi^1, \xi^2)) = t. \tag{3}$$

Если в (3) *t* фиксировано, то (3) определяет изоповерхность r(ξ^1, ξ^2) функции τ ; поверхность называют фронтом волны.

Базисными векторами лучевой системы координат являются векторы $r_t = \partial r / \partial t$ и $r_\alpha = \partial r / \partial \xi_a$, которые обладают следующим свойством: для любого *t* вектор r_t ортогонален r_α , т. е.

$$\mathrm{r}_t\,\mathrm{r}_\alpha = 0 \qquad \text{или} \qquad \mathrm{n}\,\mathrm{r}_\alpha = 0. \tag{4}$$

Действительно, дифференцируя (3) по ξ^α, получим $\nabla\tau r_\alpha = 0$, откуда с учетом (1) и (2) вытекает (4).

Рассмотрим теперь, как меняются векторы r_α на луче r(t).

Функции $\mathrm{r}_\alpha(t)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнением, которые получаются непосредственным дифференцированием (3) по ξ^α:

$$dr_\alpha / dt = n_\alpha v + (cr_\alpha)n,$$

$$dn_\alpha / dt = (n^T \psi\, r_\alpha)n + (cn_\alpha)n + (cn)n_\alpha - \psi\, r_\alpha. \qquad (5)$$

Здесь T — знак транспонирования, ψ - матрица вторых производных скорости по декартовым координатам:

$$\psi = \begin{pmatrix} v_{xx} & v_{xy} & v_{xz} \\ v_{yx} & v_{yy} & v_{yz} \\ v_{zx} & v_{zy} & v_{zz} \end{pmatrix}$$

(см. также [15, 16]).

Введем матричные обозначения: R = $\|r_{k\alpha}\|$, N = $\|n_{k\alpha}\|$. Здесь и далее k=1, 2, 3 обозначают номер декартовой координаты соответствующего вектора. Обозначая производную по t точкой, соотношения (5) можно записать в виде:

$$\mathrm{R} = \mathrm{N}v + \mathrm{nc}^T\mathrm{R}, \qquad (6)$$

$$\mathrm{N} = \mathrm{nn}^T \psi\, \mathrm{R} + \mathrm{nc}^T\mathrm{N} + (\mathrm{c}^T\mathrm{n})\mathrm{N} - \psi\, \mathrm{R}, \qquad (7)$$

здесь n и c — вектор-столбцы.

Решая систему, можно получить в любой точке t луча r(t) векторы r_α и n_α или матрицы R, N, с помощью которых можно вычислить первую (A) и вторую (B) квадратичные формы фронта волны:

$$\mathrm{A} = \mathrm{R}^T\mathrm{R}, \qquad (8)$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{R}^T\mathrm{N} = \mathrm{N}^T\mathrm{R}, \qquad (9)$$

а значит, и любые другие локальные характеристики второго порядка фронта волны (нормальные кривизны, геодезическое кручение и т. д.). Например, геометрическое расхождение равно определителю A.

Система уравнений (5) — (7) состоит из 18 скалярных уравнений с довольно сложными правыми частями. Способ пересчета основан на численном интегрировании этой системы. Значительное упрощение дифференциальных уравнений, достигнуто введением новых систем координат (t, q_1, q_2), локальные свойства которых заключаются в следующем: при $q_1 = q_2 = 0$ координатной линией r(t) является луч, в точках на луче базисные векторы e_i для координат q_i ортогональны лучу, имеют постоянную длину и постоянный угол между ними.

Векторы e_i r_α и n_α лежат в одной плоскости, так как все они ортогональны лучу (ортогональность n_α вытекает из дифференцирования тождества $\mathrm{n}\cdot\mathrm{n}=1$ по ξ^α). Следовательно, можно разложить векторы r_α и n_α/v в базисе e_i. Матричная форма этого разложения имеет вид:

$$\mathrm{R} = \mathrm{EQ}, \qquad (10)$$

$$\mathrm{N} = \mathrm{EP}v; \qquad (11)$$

здесь Q и P — матрицы коэффициентов разложения, E = $\|e_{ki}\|$.

То что угол между векторами e_i и их длина не меняются вдоль луча r(t), формально представляется в виде:

$$\mathrm{E}^T\mathrm{E} = \mathrm{D}, \qquad (12)$$

$$\dot{D} = 0. \qquad (13)$$

Дифференцируя (12) с учетом (13), будем иметь

$\dot{E}^T E = -E^T \dot{E} = -(\dot{E}^T E)^T$,

откуда заключаем, что

$$\dot{E}^T E = L; \tag{14}$$

здесь $L = \begin{pmatrix} 0, & -\lambda(t) \\ \lambda(t), & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda(t)$ - произвольная скалярная функция.

Подставляя (10) и (11) в (6) и (7), получим

$$\dot{E}Q + E\dot{Q} = EPv^2 + nc^T EQ, \tag{15}$$

$$\dot{E}Pv + E\dot{P}v = nn^T \psi EQ + nc^T EPv - \psi EQ. \tag{16}$$

Умножим (15) на Q^{-1} справа, тогда (15) приобретает вид:

$$\dot{E} = nc^T E + E(PQ^{-1}v^2 - \dot{Q}Q^{-1}). \tag{17}$$

Умножая (17) на E^T слева и используя ортогональность e_i и n, т. е. $E^\tau = 0$ и (12), будем иметь

$$E^T \dot{E} = D(PQ^{-1}v^2 - \dot{Q}Q^{-1}). \tag{18}$$

Подставляя (14) и (18) и получившееся равенство в (17), придем к уравнению:

$$\dot{E} = nc^T E + ED^{-1}L. \tag{19}$$

Заданием в (19) симметричной матрицы D и функции $\lambda(t)$ определяется система обыкновенных дифференциальных уравнений, идентифицирующих базис координатной системы *(t, q^i)*. Ортогональный базис e_i соответствует, как видно из (12), случаю D = I, I — единичная матрица. В работах по пересчету характеристик рассматривается именно этот случай, однако $\lambda(t)$ различны у разных авторов, как различен и тип пересчитываемых характеристик. Так, в работах [7, 8, 11 — 13] было положено $\lambda(t)$= 0. В работе [3] $\lambda(t)$ равна кручению луча. В [6] $\lambda(t)$ такая, что e_i всегда находятся в главных сечениях фронта волны. Что же касается пересчитываемых характеристик, то в [7, 8, 12, 13], как мы увидим ниже, пересчитываются компоненты разложения векторов R_α и n_α в выбранной системе координат, нормальные кривизны фронта в сечениях определяются базисными векторами их систем координат.

Умножим (15) и (16) на E^T слева. Учитывая (12) и (14) и умножая получившееся равенство на D^{-1} слева, приходим к дифференциальным уравнениям:

$$\dot{Q} = Pv^2 - D^{-1}LQ, \tag{20}$$

$$\dot{P} = -D^{-1}E^T \psi EQ / v - D^{-1}LP. \tag{21}$$

В случае L = 0 [7, 12, 13] система (19) - (21) не зависит от D, что позволяет решать эту систему независимо для первого и второго столбцов матриц Q и P [8]. Система уравнений для случая $L \neq 0$, D = I была получена в *11]*. Вывод системы (20) и (21), полученный выше, позволяет установить геометрический смысл матриц P и Q, элементы которых, согласно (10) и (11), являются компонентами разложения векторов r_α и $n_\alpha v$ в базисе e_i.

Подставляя (10) и (11) в (8) и (9), получим выражение для квадратичных форм фронта в лучевой системе координат через матрицы P и Q:

$$A = Q^T DQ, \tag{22}$$

$$B = Q^T DPv = P^T DQv. \tag{23}$$

Первую и вторую квадратичные формы фронта в системе координат, где базис совпадает с e_i, обозначим через A_1 и B_1 соответственно. По определению первой квадратичной формы с учетом (12) справедливо

$$A_1 = E^T E = D. \tag{24}$$

Если умножить (22) на $Q^{T^{-1}}$ слева и на Q^{-1} справа и подставить в получившееся выражение (24), то окажется, что при преобразовании координат от ξ^{α} к q_i первая квадратичная форма меняется по закону

$A_1 = Q^{T^{-1}} A Q^{-1}$.

Так как обе квадратичные формы меняются по одному закону, то, применяя его к (23), получим

$$B_1 = DPQ^{-1} v. \qquad (25)$$

Соотношение, следующее из (25) при D = I, известно из (11).

Продифференцируем (25) по t с учетом (13), (20), (21) и свойства $\dot{Q}^{-1} = Q^{-1}\dot{Q}Q^{-1}$, следующего из дифференцирования тождества $Q^{-1}Q = I$. Подставляя в сомножители получившегося выражения там, где это необходимо, тождество $D^{-1}D = I$, а затем (25), будем иметь

$$\dot{B}_1 = -E^T \psi E - B_1 D^{-1} B_1 v + B_1 (c^T n) - LD^{-1} B_1 + B_1 D^{-1} L. \qquad (26)$$

Численное интегрирование (26) позволяет пересчитывать вдоль луча вторую квадратичную форму B_1 в произвольной системе координат, определяемой матрицей D и начальными условиями, к (26), при произвольном изменении системы координат при движении вдоль луча, определенном функцией $\lambda(t)$. Поскольку для получения B_1 в нужной системе координат не обязательно пересчитывать эту систему вдоль луча (вычислив B_1 в любой известной системе координат, можно по формулам преобразования координат вычислить B_1 в нужной системе), то произвол, допущенный в (26), может быть использован лишь для выбора D и λ таких, что уравнение (26) имеет наиболее простой вид. Заметим также, что (26) содержит минимальное число уравнений (в силу симметричности В — три), необходимых для описания фронта волны с точностью до коэффициентов при вторых степенях разложения в ряд Тейлора уравнения его поверхности. Ниже уравнения (26) используются для того, чтобы иметь ряд более простых систем уравнений, полученных ранее совершенно отличными друг от друга способами.

Полагая в (26) L = 0, получим уравнение переноса второй квадратичной формы фронта в неортогональной системе координат:

$$\dot{B}_1 = -E^T \psi E - BD^{-1} B v + B(c^T n). \qquad (27)$$

Уравнения переноса базисных векторов этой системы координат, как следует из (19), имеют вид:

$$\dot{E} = nc^T E, \qquad (28)$$

т. е. эти векторы переносятся так же, как базисные векторы системы координат Попова — Пшенчика [12, 13], но не ортогональны между собой и имеют разную длину. Длина этих векторов и угол между ними определяются матрицей D.

Если теперь в (27) положить D = I, то придем к уравнению переноса второй квадратичной формы фронта в ортонормированной системе координат [И], базисные векторы которой удовлетворяют (28):

$$\dot{B} = -E^T \psi E - BBv + B(c^T n). \qquad (29)$$

Пусть S — длина дуги луча, тогда функция $S(t)$ удовлетворяет условию

$$\dot{S} = v. \qquad (30)$$

Действительно, умножив первое уравнение из (2), которое, используя правило дифференцирования сложной функции, можно записать в виде $d\mathrm{r}/dS \cdot \dot{S} = nv$, на n и принимая во внимание очевидное равенство $(d\mathrm{r}/dS)\cdot n = 1$, убеждаемся в справедливости (30). Умножим известные формулы Френе, записанные для луча, на v, получившиеся выражения, учитывая (30), можно записать в виде:

$$\dot{a} = (\chi b - kn)v\,,$$
$$\dot{b} = -\chi av\,, \tag{31}$$
$$\dot{n} = kav\,;$$

здесь a и b — нормаль и бинормаль к лучу, а k и χ — кривизна и кручение луча.

Полагая в (19) D = I и $\lambda = \chi v$, получим в векторной форме

$$\dot{e}_1 = (ce_1)n + e_2\chi v\,,$$
$$\dot{e}_2 = (ce_2)n - e_1\chi v\,. \tag{32}$$

Легко показать с помощью (31) и (32) и условий ортогональности векторов e_i и a, b, что производная выражений $e_i a$ и $e_i b$ по t равна нулю. Это значит, что при движении вдоль луча в соответствии с (31) и (32) угол между ортогональными базисами e_i и a, b не меняется. Следовательно, если выбрать в качестве начальных значений (32) $e_1 = a$ и $e_2 = b$, то (32) должно совпасть с первыми двумя уравнениями из (31). В этом случае, как следует из последнего утверждения и уравнений (31) и (32)

$$ce_1 = -kv, \tag{33}$$
$$ce_2 = 0. \tag{34}$$

Продифференцируем (34) по t, затем в результат подставим (32) с учетом (33) и (34), откуда найдем λ, поскольку $\lambda = \chi v$,

$$\lambda = n^T\psi\, e_2 / k\,. \tag{35}$$

Подставляя (35) в (26), учитывая, что D = I, получим дифференциальные уравнения пересчета второй квадратичной формы фронта волны в системе координат, базисные векторы которой совпадают с нормалью и бинормалью к лучу [3]:

$$\dot{B}_1 = -e^T\psi E - B_1B_1v + B_1(c^Tn) - LB_1 + B_1L\,,$$
$$L = \begin{pmatrix} 0, & n^T\psi\, e_2/k \\ -n\psi\, e_2/k, & 0 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

Уравнения (36) имеют несколько более сложный вид, чем (29), однако они не требуют дифференциальных уравнений для вычисления базисных векторов, поскольку последние (нормаль и бинормаль) могут быть вычислены в процессе интегрирования уравнения луча.

Получим теперь уравнения переноса вдоль луча ортонормированного базиса, векторы которого касательны к линиям кривизны фронта волны и второй квадратичной формы для этого базиса, т. е. главных кривизн [6]. Функцию $\lambda(t)$ для получения этих уравнений легко выбрать из условия, что диагональные элементы матрицы B_1 в этом базисе равны 0, $b_{12} = b_{21} = 0$.

Подставляя эти равенства в (26), с учетом того, что D = I, получим в координатной форме:

$$\dot{b}_{11} = -\psi_{11} - b_{11}^2v + b_{11}c_3\,,$$
$$\dot{b}_{22} = -\psi_{22} - b_{22}^2v + b_{22}c_3\,, \tag{37}$$
$$\lambda(t) = \psi_{12}/(b_{22} - b_{11})\,; \tag{38}$$

здесь $\psi_{ij} = e_i\psi e_j$, $ij = 1, 2$, $c_3 = c^Tn$, b_{11} и b_{12} - главные кривизны.

Дифференциальные уравнения переноса ортов векторов, касательных к линиям кривизны, находятся подстановкой (38) и равенства D = I в (19):

$$\dot{e}_1 = (ce_1)n + e_2\psi_{12}/(b_{22} - b_{11})\,,$$
$$\dot{e}_2 = (ce_2)n + e_1\psi_{12}/(b_{22} - b_{11})\,. \tag{39}$$

В заключение укажем еще несколько работ, посвященных пересчету геометрических характеристик фронта волны. Можно получить уравнения переноса квадратичных форм фронта волны в лучевой системе координат [4]. Из (8), (9), (11) и (23) следует, что $N^T N = BA^{-1}B$. Дифференцируя (8) и (9) с учетом этого соотношения и (6) и (7), получим указанные уравнения:

$$\dot{A} = 2vB,$$
$$\dot{B} = BA^{-1}Bv + (c^T n)B - R^T \psi R. \quad (40)$$

В [2] показано, что величин $\partial\chi_i/\partial\xi_j$ и $\partial\chi_i/\partial t$ $(i, j = 1, 2)$, где χ_1 - две любые декартовы координаты в E^3, достаточно для вычисления геометрического расхождения, получены дифференциальные уравнения переноса некоторых линейных комбинаций из этих величин, включающих геометрическое расхождение.

Что касается пересчета геометрических характеристик фронта волны в анизотропных средах, то к настоящему времени в отечественной литературе по этой проблеме опубликованы две работы: М. А. Гринфельда и В. А. Шарафутдинова [5, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбель И. Я. и др. Методика расчета геометрического расхождения в трехмерно-неоднородной среде.— В кн.: Методы и алгоритмы интерпретации сейсмогеологических данных. М.: Наука, 1980.
2. Белоносова А. В., Цецохо В. А. Вычисление геометрического расхождения в декартовых координатах.— В кн.: Математические методы интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979.
3. Гольдин С. В. Интерпретация данных сейсмического метода отраженных волн. М.: Недра, 1979.
4. Герасименко А. Н. О некоторых тензорных соотношениях геометрической сейсмики.— Геофиз. журнал, 1981, т. 3, № 7.
5. Гринфельд М. А. Новая система уравнений вычисления геометрического расхождения.— В кн.: Методы и алгоритмы интерпретации сейсмогеологических данных. *М.:* Наука, 1980.
6. Зверинский К. Н. О геометрии поверхности фронта волны и лучевом расхождении. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978.
7. Попов М. М. Об одном методе вычисления геометрического расхождения в неоднородной среде, содержащей границы раздела.— ДАН СССР, 1977, т. 237, № 5.
8. Попов М. М. Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближения. Л.: ЛОМИ, 1981.
9. Черняк В. С. Расчет эффективных скоростей в МОВ и МОГТ для слоистых сред с наклонными и криволинейными границами.—В кн.: Прикладная геофизика. Вып. 71, М.: Недра, 1973.
10. Шарафутдинов В. А. О геометрическом расхождении.— В кн.: Математические методы интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979.
11. Hubral P. A. Wave Front Curvature Approach to the Computing of Ray Amplitudes in Inhomogeneous Media with Curved Interfaces.— Stadia Geophys., Geod., 1979, v. 23.

12.Popov M. M., Psencik I. Computation of Ray Amplitudes In Inhomogeneous Medium.— Stadia Geophys., Geod., 197$, v. 22.

13.Popov M. M., Psencik I. Ray Amplitudes In Inhomogeneous Media With Curved Interfaces Travaux.— Inst. Geophys. Acod. Tchecous. Sci. Geophys. sbornik, 1978, N 454.

14.Shah P. M. Use of Wave front Curvature to Relate Seismic Data With Subsurface parameters.— Geophysics, 1973,, v. 38, N 5.

15.Cerveny V., Langer I., Psencik I. Computation of Geometric Spreading of Seismic Body Waves in Laterally Inhomogeneous Media with Curved Interfaces.— I. Roy. Astra. Soc.,. 1974, v. 38.

16.Wesson R. L. A Time Integration Method for Compilation of Intensities of Seismic Rays.— Bull. Seism. Soc. Amer., 1970, v. 60.

СибГЭ
Новосибирск

Поступила в редакцию
26 февраля 1983 г.

S. A. Gritsenko

THE WAYS OF CALCULATING GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF WAVE FRONT IN ISOTROPIC HETEROGENEOUS MEDIUM

The article is the review of the papers that deals with recalculation of the characteristics of wave front along fixed ray (curvature of front, quadrature front forms, derivatives from cononic variable *P* and *Q).* The review is based on the proposed principles of formalism with the help of which we obtain all existing differential equations of recalculation from common positions. The principles of formalism are founded on fhe introduction of generalized system of coordinates into environs of the ray, where Popov — Pshenchik system of coordinates, mobile trihedron (normal, binomial, tangent) and the system of coordinates for curvatures (principal curvatures) are its particular cases. The equations of transfer of generalized system of coordinates and the equation of transfer the front characteristics in it are obtained The equations of transfer obtained by different authors are the particular cases of these equations. The values *P* and *Q* are geometrically characterized.